5. Vertexrekonstruktion

5.1 Grundlagen

In diesem Kapitel soll untersucht werden, wie genau sich der Vertex mit der beschriebenen Anordnung von innerer und äußerer Lage bestimmen läßt. Nach einer allgemeinen Einführung folgt eine konkrete Rechnung für den Fall der elastischen Proton-Proton Streuung.

In jeder Hemisphäre gibt es je einen Durchstoßpunkt in der inneren und äußeren Lage. In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Target im Ursprung können diese vier Raumpunkte A,B,C und D durch die vier Vektoren **a**,**b**,**c** und **d** beschrieben werden. Die folgende Abbildung 5.1 zeigt einen Schnitt durch den Detektor in der y-z-Ebene, die im folgenden als Reaktionsebene definiert wird:

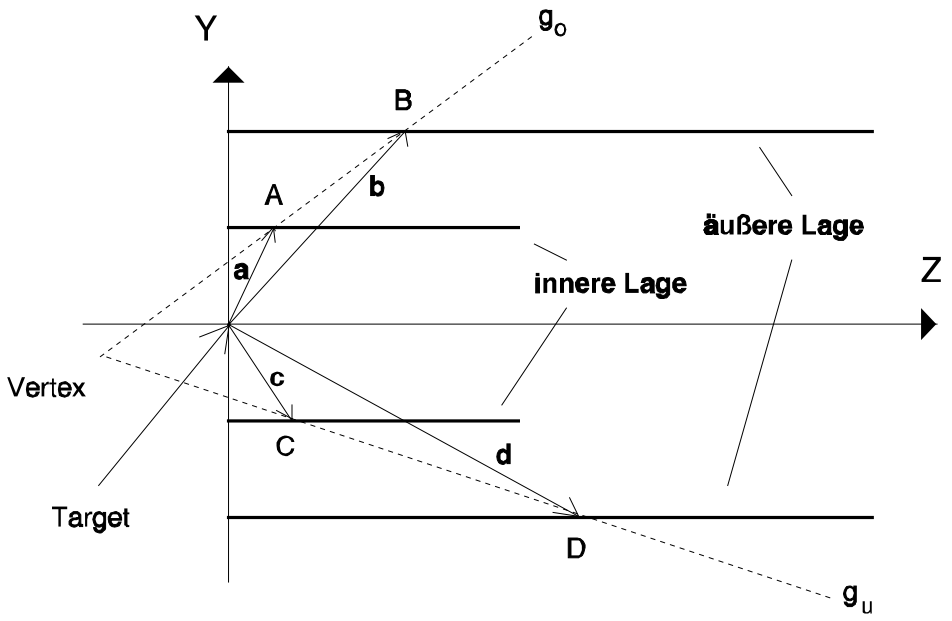

Abb. 5.1 Vertexrekonstruktion mit Geraden im $\mathbb{R}^3$

Die Vektoren **a**,**b**,und **c**,**d** definieren je eine obere und untere Gerade mit der Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{g}_o = \boldsymbol{a} + t\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \tag{5.1.1}$$

$$\boldsymbol{g}_u = \boldsymbol{c} + \tau\,(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}) \tag{5.1.2}$$

Für den kleinsten Abstand Δ der beiden Geraden kann mit den Methoden der linearen Algebra über Kreuz- und Skalarprodukte folgender Ausdruck abgeleitet werden [Fis 81]:

$$\Delta = \frac{\left|<(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})>\right|}{\left|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})\right|} \tag{5.1.3}$$

Zur Berechnung der beiden Raumpunkte, die den Abstand Δ haben, benötigt man noch die Werte für t und τ:

$$t = \frac{<(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})>}{\left|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})\right|^2} \tag{5.1.4}$$

$$\tau = \frac{<(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})>}{\left|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})\right|^2} \tag{5.1.5}$$

Setzt man die Gleichungen (5.1.4) und (5.1.5) in die Gleichungen (5.1.1) und (5.1.2) ein, so erhält man die beiden Punkte g_o und g_u, die den minimalen Abstand Δ haben.

Eine der möglichen Definitionen zur Bestimmung des Vertex von zwei Trajektorien ist der gewichtete Mittelwert der beiden Punkte, die den kleinsten Abstand haben [Duf 75]. Zerlegt man die Koordinate des Vertex V in seine 3 Komponenten i = x,y,z so gilt:

$$V_i = \frac{\frac{g_i^{\,o}}{\sigma_i^{o\,2}} + \frac{g_i^{\,u}}{\sigma_i^{u\,2}}}{\frac{1}{\sigma_i^{o\,2}} + \frac{1}{\sigma_i^{u\,2}}} \qquad (\ i = x,y,z\ ) \qquad (5.1.6)$$

Die Gewichte σ_i^{o} und σ_i^{u} erhält man durch gaußsche Fehlerfortpflanzung nach den Fehlern der Komponenten der vier Durchstoßpunkte A,B,C und D in (5.1.1) und (5.1.2). Den Fehler des Vertex V erhält man durch entsprechende Fehlerfortpflanzung von (5.1.6).
Nach welchen Kriterien die Fehler der Komponenten der Durchstoßpunkte A,B,C und D berechnet werden, wird in den folgenden Kapiteln für die innere und äußere Lage beschrieben.

5.2 Die Ortsauflösung in der inneren Lage

Die folgenden Berechnungen beziehen sich auf eine Anordnung aus 2.5 mm Fasern, die in 4 Lagen nach den Überlegungen von Kapitel 4.2 gewickelt sind. Diese Geometrie liefert als Elementarzellen Rauten, die im ungünstigsten Fall die Ausdehnungen, ausgedrückt in Standardabweichungen, nach (4.3.9) und (4.3.10) haben. Damit erhält man für die Fehler der x- und z-Komponente des Durchstoßpunktes A die Werte

$$\sigma_x^A = 0.59 \text{ mm} \qquad (5.2.4)$$

$$\sigma_z^A = 1.22 \text{ mm} \qquad (5.2.5)$$

Im Koordinatensystem nach Abbildung 5.1 ist die y-Komponente der radiale Abstand der inneren Lage von der z-Achse. Der Fehler dieses Abstands ist gegeben durch die absolute Positioniergenauigkeit, mit der die innere Lage bezüglich der Sollachse montiert werden kann. Nimmt man eine Rechteckverteilung mit einer Halbachse von 1/10 mm für diese

Unsicherheit an, so entspricht dies einem σ Wert von

$$\sigma_y^A = \frac{1}{\sqrt{3}}\ 0.1 = 0.06\ \text{mm} \qquad (5.2.6)$$

Für den Durchstoßpunkt C auf der gegenüberliegenden Hemisphäre gelten die gleichen Überlegungen. Diese Werte gelten auch für den Fall mehrerer, benachbarter getroffener Fasern bei kleinen Streuwinkeln. Man erwartet zunächst eine verminderte Auflösung, da sich die Zahl der getroffenen Rauten vergrößert. Da man aber die getroffenen Fasernummern in der links- und rechtsgewickelten Helix genau kennt, kann nach folgendem anschaulichen Bild die richtige Raute bezüglich des mittleren radialen Abstands r der Doppelhelix ermittelt werden.

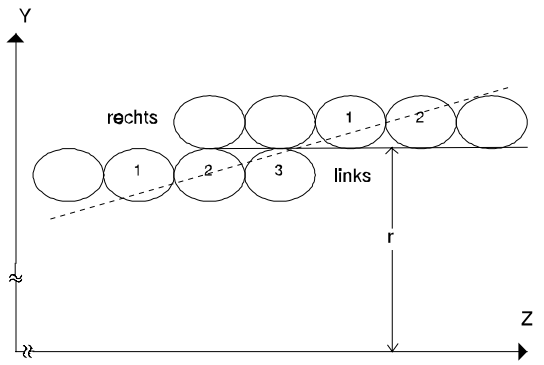

Abb. 5.2 Bestimmung einer einzelnen Raute bei mehreren getroffenen Fasern

In dieser Anordnung ist die richtige Raute bezüglich des mittleren radialen Abstands r definiert durch die größte getroffene Fasernummer in der linksgewickelten Helix und durch die kleinste getroffene Fasernummer in der rechtsgewickelten Helix. Die Auflösung ist damit unabhängig vom Streuwinkel θ_{lab}.

Bevor auf die Ortsauflösung der Durchstoßpunkte der äußeren Lage eingegangen wird, soll erst der Einfluß der Vielfachstreuung im Strahlohr und innerer Lage diskutiert werden.

5.3 Der Einfluß der Vielfachstreuung im Strahlrohr und der inneren Lage auf die Ortsauflösung in der äußeren Lage

Auf dem Weg vom Target in die äußere Lage passieren die Teilchen das Strahlrohr und die innere Detektorlage aus szintillierenden Fasern. In beiden Schichten erfahren die Teilchen durch Vielfachstreuung (multiple scattering, kurz msc) eine Richtungsänderung, die durch die Standardabweichung θ_{msc} beschrieben werden kann [RPP 90]:

$$\theta_{msc} = \frac{13.6\ MeV/c}{\beta \cdot p} \sqrt{\frac{d}{L}} \left[1 + 0.038 \ln\left(\frac{d}{L}\right)\right] \tag{5.3.1}$$

Die Materialdicke wird durch d definiert, während L die Strahlungslänge des Materials angibt. Für den Fall der Proton-Proton Streuung kann die Größe $1/\beta p$ der durch folgenden Ausdruck beschrieben werden:

$$\frac{1}{\beta \cdot p} = \frac{E}{P^2} = \frac{T + m_p}{T\,(\,T + 2m_p\,)} \tag{5.3.2}$$

T ist die kinetische Energie der gestreuten Protonen (siehe Anhang A) und m_p deren Ruhemasse. Nach (5.3.1) kann die Aufstreuung im Strahlrohr θ_{ST} und in den Fasern θ_{SC} getrennt berechnet werden:

$$\theta_{ST} = \frac{13.6\ (T + m_p)}{T\ (T + 2m_p)} \sqrt{\frac{d_{ST}}{L_{ST} \sin\theta}} \left[\ 1 + 0.038 \ln\left(\frac{d_{ST}}{L_{ST} \sin\theta}\right)\ \right] \tag{5.3.3}$$

$$\theta_{SC} = \frac{13.6\ (T + m_p)}{T\ (T + 2m_p)} \sqrt{\frac{d_{SC}}{L_{SC} \sin\theta}} \left[\ 1 + 0.038 \ln\left(\frac{d_{SC}}{L_{SC} \sin\theta}\right)\ \right] \tag{5.3.4}$$

In diesen Gleichungen ist der Term sinθ bedingt durch den schrägen Durchtritt der Teilchen. Die kinetische Energie T ist in MeV einzusetzen. Für die Größen d und L gelten folgende Werte:

$$d_{ST} = 0.15 \text{ cm}$$
$$d_{SC} = 1.50 \text{ cm}$$
$$L_{ST} = 8.9 \text{ cm}$$
$$L_{SC} = 42.4 \text{ cm}$$

Die resultierende Winkelaufstreuung θ_{msc} erhält man durch quadratische Addition

$$\theta_{msc} = \sqrt{\theta_{ST}^2 + \theta_{SC}^2} \tag{5.3.5}$$

Die Projektion von θ_{msc} auf die Ringe und Streifen zeigt die folgende Abbildung:

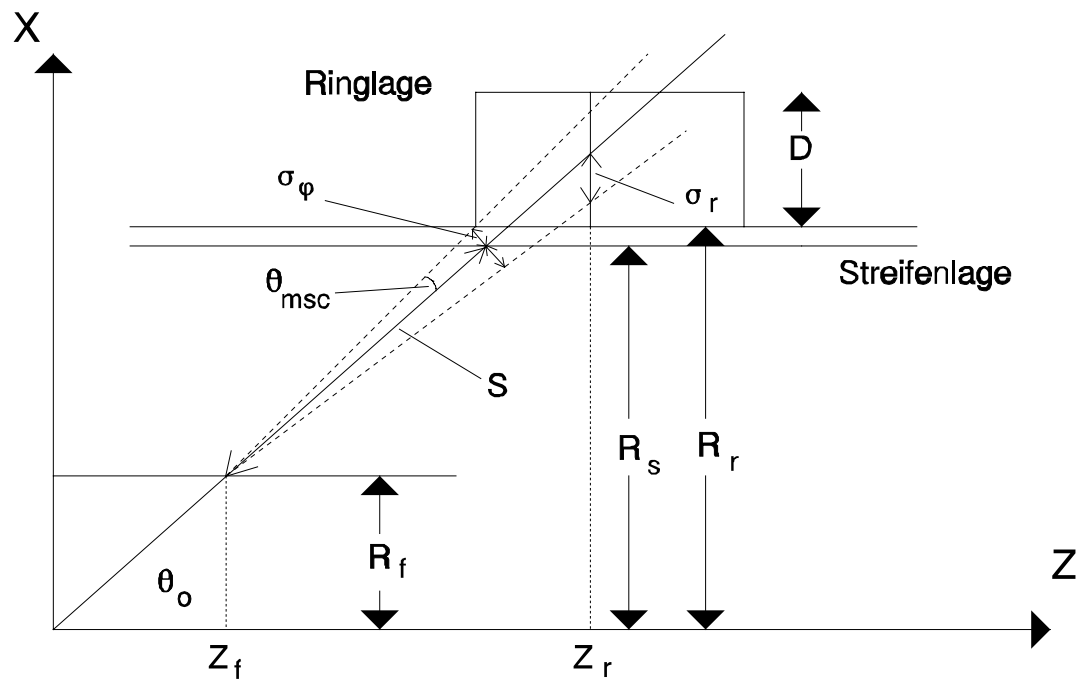

Abb. 5.3 Einfluß der Vielfachstreuung auf die äußere Lage

Für die Projektion σ_r auf die Ringe gilt:

$$\tan\theta_o = \frac{R_r + D/2}{Z_r} \tag{5.3.6}$$

$$\tan(\theta_o \pm \theta_{msc}) = \frac{R_r + D/2 - R_f \pm \sigma_r}{Z_r - Z_f} \tag{5.3.7}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_r = \frac{R_r + D/2 - R_f}{2\tan\theta_o} [\tan(\theta_o + \theta_{msc}) - \tan(\theta_o - \theta_{msc})] \tag{5.3.8}$$

Für die Projektion σ_φ auf die Szintillatorstreifen gilt:

$$\theta_{msc} = \frac{\sigma_\varphi}{S} \tag{5.3.9}$$

$$S = \frac{R_s - R_f}{\sin\theta_o} \tag{5.3.10}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_\varphi = \frac{R_s - R_f}{\sin\theta_o}\,\theta_{msc} \tag{5.3.11}$$

Für die radialen Abstände R_a, R_s und die Ringdicke D ist einzusetzen

$R_a = 170$ mm
$R_s = 160$ mm
$D = 21.4$ mm

Für die elastische Proton-Proton Streuung erhält man mit den Gleichungen (5.3.8) und (5.3.11) für die Einschußenergien 0.5 und 2.5 GeV folgende Verteilungen über den Streuwinkel θ_{lab}:

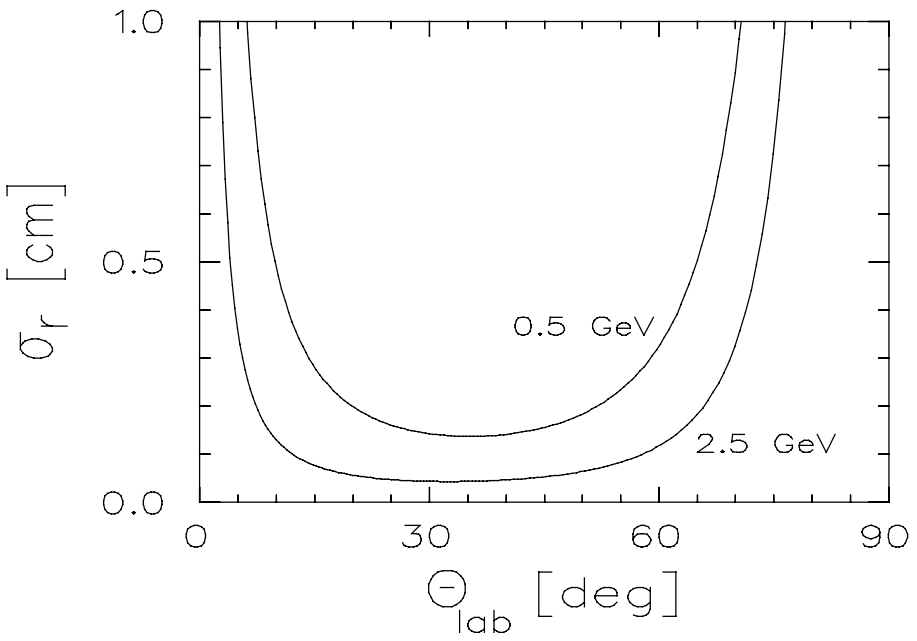

Abb. 5.4 Projektion von θ_{msc} auf die Ringschale für die elastische Proton-Proton Streuung bei Einschußenergien von 0.5 und 2.5 GeV

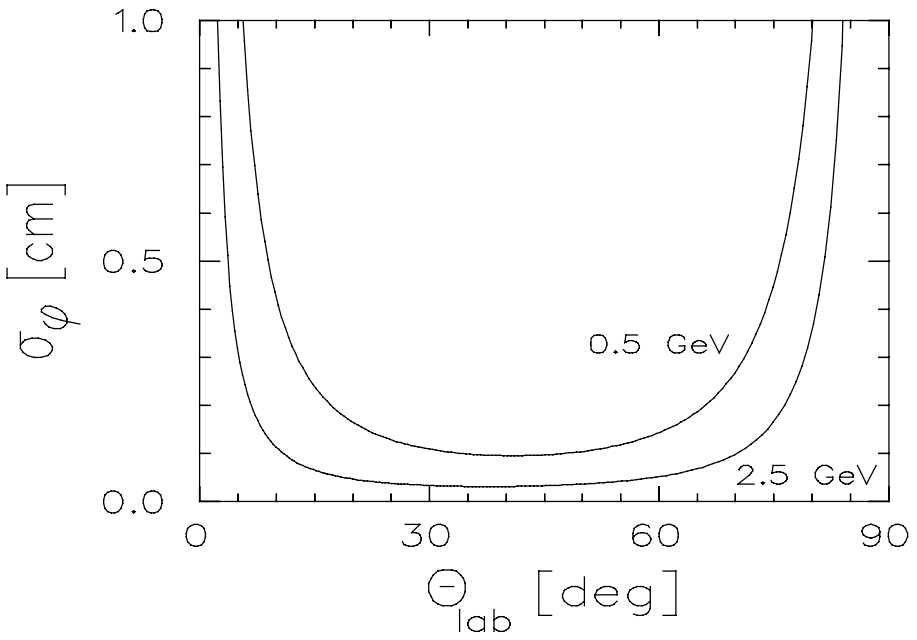

Abb. 5.5 Projektion von θ_{msc} auf die Streifenlage für die elastische Proton-Proton Streuung bei Einschußenergien von 0.5 und 2.5 GeV

Für kleine Streuwinkel steigen die Werte an, da die Materialdicke mit 1/sinθ zunimmt, während der Anstieg bei großen Streuwinkeln auf die niedrige kinetische Energie der Protonen zurückzuführen ist.

5.4 Die Ortsauflösung in der äußeren Lage

Die Durchstoßpunkte in der äußeren Lage werden durch die in Kapitel 3 beschriebene Amplitudenteilung ermittelt. Wie durch Messungen mit minimal ionisierenden Elektronen gezeigt wurde, kann mit dieser Methode eine Ortsauflösung von

$$\sigma_A = 1 \text{ mm}$$

erreicht werden. Zu diesem Wert muß noch die Unsicherheit σ_r und σ_φ aufgrund der Vielfachstreuung im Strahlrohr und der inneren Lage addiert werden, so daß man für die Komponenten des Durchstoßpunktes B folgende Fehler erhält:

$$\sigma_x^B = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_A^2} \qquad (5.4.1)$$

$$\sigma_y^B = \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \sigma_A^2} \qquad (5.4.2)$$

$$\sigma_z^B = 0.06 \text{ mm} \qquad (5.4.3)$$

Der Fehler der z-Komponente ist genau wie bei der inneren Lage (siehe Kapitel 5.2) durch die Genauigkeit gegeben, mit der die äußere Lage bezüglich der Sollachse positioniert werden kann. Für den Durchstoßpunkt D in der unteren Hemisphäre gelten die gleichen Überlegungen, so daß nun alle 12 Fehlerkomponenten festliegen.

5.5 Vertexrekonstruktion für die elastische Proton-Proton Streuung

Nachdem alle Fehlerkomponenten bestimmt wurden, können für den Spezialfall der elastischen Proton-Proton Streuung die Fehlerkomponenten des Vertex berechnet werden. Bei der Berechnung der Fehler σ_i^o und σ_i^u hat sich gezeigt, daß die Werte komponentenweise identisch sind. Dies erwartet man auch, da die Werte t und τ nach (5.1.4) und (5.1.5) aus den gleichen 4 Durchstoßpunkten A,B,C und D berechnet werden. Die Gleichung (5.1.6) für die Bestimmung des Vertex reduziert sich damit auf

$$V_i = \frac{1}{2}\,(g_i^{\,o} + g_i^{\,u}) \qquad (\ i = x,y,z\ ) \qquad (5.5.1)$$

Einsetzen der Werte für t und τ ((5.1.4) und (5.1.5)) in die Gleichungen für g_i^o und g_i^u ((5.1.1) und (5.1.2)) liefert eine Funktion für den Vertex, die nur noch von den Grundgrößen A,B,C und D abhängt. Mit gaußscher Fehlerfortpflanzung nach diesen 4 Größen erhält man die Fehler der Komponenten des Vertex.
Das Koordinatensystem wird bei den folgenden Betrachtungen nach Abbildung 5.1 immer so gedreht, daß die y-z-Ebene in der Reaktionsebene der elastischen Proton-Proton Streuung liegt ! Dadurch werden die Fehler der y-Komponente immer maximal, da in diesem Fall der Einfluß des Fehlers σ_r nach (5.3.8) dominiert. Entsprechend ist in der dazu senkrechten x-Komponente der Fehler minimal, da hier nur der Einfluß von σ_φ eingeht, der nach Abbildung 5.5 vor allem in den Flanken deutlich kleiner ist. Im Laborsystem mit festen Koordinatenachsen ist das der Spezialfall, in dem die Reaktionsebne in der Vertikalen liegt. Für alle anderen Fälle nimmt σ_x und σ_y im festen Laborsystem Werte zwischen diesen beiden Grenzwerten an. Bei einem Azimutwinkel von $\varphi = 45^o$ sind beide σ-Werte gleich groß.

Gerechnet wurde jeweils für die Einschußenergien 0.5 und 2.5 GeV. Für die einzelnen Komponenten ergeben sich folgende Verteilungen.

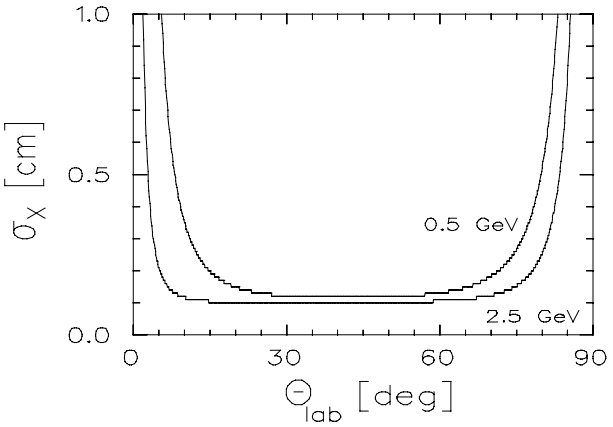

Abb.5.6 Standardabweichung der x-Komponente des Vertex senkrecht zur Reaktionsebene

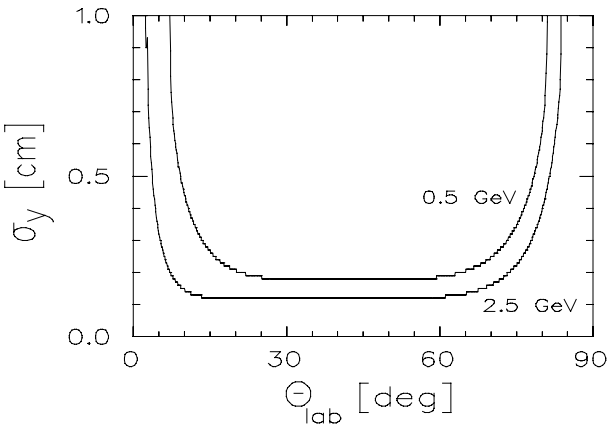

Abb. 5.7 Standardabweichung der y-Komponente des Vertex in der Reaktionsebene

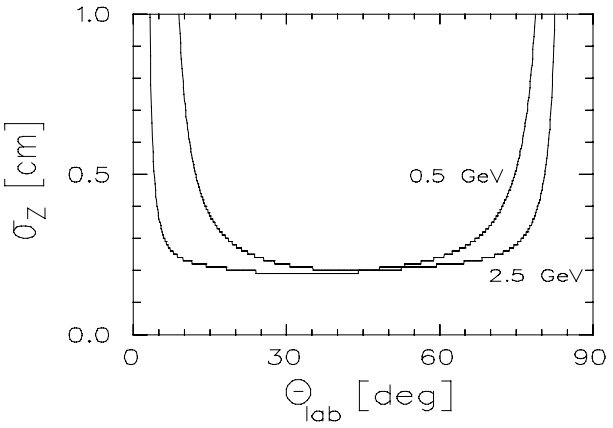

Abb. 5.8 Standardabweichung der z-Komponente des Vertex

In allen 3 Komponenten der Standardabweichung des Vertex spiegeln sich die Projektionen der Kleinwinkelstreuung auf die Streifen- und Ringlage nach Abbildung 5.4 und 5.5 wieder. Im symmetrischen Winkel erreichen alle Kurven ein Minimum, das durch die Granularität der inneren Lage und die Auflösung der Amplitudenteilung in der äußeren Lage festgelegt ist. Verdoppelt man z.B. die Faserdicke in der inneren Lage, so steigt der Wert der Standardabweichung im symmetrischen Winkel etwa um den Faktor 1.7 .

In den Flanken der Kurven, also bei kleinen und großen Streuwinkeln θ_{lab} dominiert dagegen, vor allem bei niedrigen Einschußenergien, die Verschmierung der Durchstoßpunkte in der äußeren Lage durch die Kleinwinkelstreuung im Strahlrohr und der inneren Lage. Mit steigender Einschußenergie wird dieser Effekt kleiner, was nach (5.3.1) auch zu erwarten ist. Bei der maximal möglichen **COSY**-Energie von 2.5 GeV wird die Genauigkeit der Vertexrekonstruktion im vom Detektor zugänglichen Winkelbereich von $\theta_{lab} = 10^o$ bis 72^o nur durch die Granularität des Detektors bestimmt. Bei 2.5 GeV Strahlenergie betragen die Werte der Standardabweichungen im Minimum $\sigma_x = 1.0$ mm, $\sigma_y = 1.2$ mm, $\sigma_z = 1.9$ mm. Im Mittel über alle 3 Komponenten kann also eine Standardabweichung von 1.4 mm erreicht werden.

Diese Werte wurden unter der Annahme erhalten, daß die Auflösung der inneren Lage durch die Kreuzung von zwei einzelnen Fasern festgelegt ist. Da die Doppelhelix aus zwei Doppellagen besteht, kann die Auflösung durch die gezielte Ausnutzung von nicht angesprochenen Fasern vergrößert werden. Falls z.B. nur je eine Lage aus einer Wicklungsrichtung anspricht, so muß das Teilchen durch eine Lücke in der jeweils anderen Lage geflogen sein. Die Auflösung wird damit im Prinzip verdoppelt und der Vertex kann genauer bestimmt werden. Geht man vom oben angegebenen Faktor 1.7 aus, so sollten Standardabweichungen im Mittel über alle drei Komponenten von etwa 0.8 mm erreichbar sein. Bei einer Ausdehnung des Atomstrahltargets von 10 mm ist man damit durchaus in der Lage, Vertexkoordinaten innerhalb des Targetvolumens zu lokalisieren.