Anhang A

Streuamplituden und Polarisationsobservablen

Einen detaillierten und umfassenden Überblick zur Definition und Berechnung von Polarisationsobservablen aus den Streuamplituden sowie die Transformation zwischen verschiedenen Koordinatensystemen wird in [BYS78] dargestellt. In der wichtigen Arbeit von Jacob und Wick [JAC59] wird der Helizitätsformalismus entwickelt. Für das grundlegende Verständnis von Polarisationsobservablen sind [OHL72], [CON91] und [BOU80] sehr hilfreich. Im folgenden wird die elastische Streuung von 2 Nukleonen im Isospin 1 - Kanal betrachtet

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad (A.1)$$

Jedes Nukleon kann 2 Spinzustände (im folgenden mit '+' und '-' bezeichnet) annehmen, so daß sich für die 2-Teilchen Spinwellenfunktion

$$\chi_f = M(\theta,E)\,\chi_i \qquad (A.2)$$

---

[1] Insgesamt gibt es für den Isospin 1 - Kanal nur 9 reelle Paramter, da eine gemeinsame Phase in allen Amplituden frei wählbar ist.

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (A.3)$$

Die allgemeinste Darstellung einer Polarisationsobservablen O(i, j, k, l) mit i, j, k, l ∈ {0,x,y,z} lautet:

$$<O(i,\, j,\, k,\, l)> = \frac{Tr\,(M\ \sigma_i \otimes \sigma_j\ M^{+}\ \sigma_k \otimes \sigma_l)}{Tr(MM^{+})} \qquad (A.4)$$

wobei sich i und j auf die Polarisation von Projektil und Targetteilchen und k und l auf die Polarisation von Projektil und Rückstoßteilchen [illegible] insgesamt 4·4·4·4 = 256 mögliche [illegible] des[2] Pauli-Prinzips, der Paritätserhaltung und der Zeitumkehrinvarianz reduziert sich die Gesamtzahl für den Isospin 1 - Kanal von 256 auf 25 unabhängige Observablen[3]. Die Größe

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\, Tr(MM^{+}) \qquad (A.5)$$

ist der differentielle Wirkungsquerschnitt, auf den sämtliche Polarisationsobservable normiert werden. Die Bezeichnungen der Observablen sind sehr unterschiedlich und hängen u.a. vom gewählten Bezugssystem ab, weshalb im folgenden nur die beiden wichtigsten Definitionen vorgestellt werden.

a) Die Polarisationsobservablen nach [BYS78] werden im **CM-System** definiert, wobei das Koordinatensystem aus dem Impuls k_i von Teilchen 1 im Eingangskanal und k_f von Teilchen 3 im Ausgangskanal aufgespannt wird. Es ist gegeben durch die 3 senkrecht zueinander stehenden CMS-Basisvektoren l, m und n (s. Abb. A1):

$$\vec{l} = \frac{\vec{k}_f + \vec{k}_i}{|\vec{k}_f + \vec{k}_i|} \qquad \vec{m} = \frac{\vec{k}_f - \vec{k}_i}{|\vec{k}_f - \vec{k}_i|} \qquad \vec{n} = \frac{\vec{k}_f \times \vec{k}_i}{|\vec{k}_f \times \vec{k}_i|} \qquad (A.6)$$

Die Reihenfolge der Indizes p, q, i, und k einer Polarisationsobservablen O_{pqik} werden in folgender Weise festgelegt (für das CM-System und das Laborsystem):

i - Strahlteilchen	p - gestreutes Teilchen
k - Targetteilchen	q - Rückstoßteilchen

---

[2] In der Literatur wird das Tensorprodukt ${}_i \otimes {}_j$ häufig auch als ${}_i\,{}_j$ geschrieben.

[3] Für identische 2-Teilchensysteme (pp und nn) vermindert sich im symmetrischen Winkel die Gesamtzahl der linear unabhängigen Observablen auf nur 9.

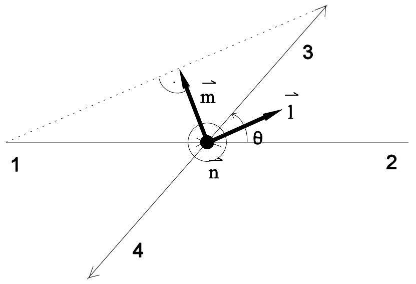

Abb. A1 Zur Definition der Polarisationsrichtungen im CM-System werden neue Koordinatenvektoren l, m und n eingeführt (s. Gleichung A.6); der Vektor n steht aus der Zeichenebene heraus

wobei jedes Teilchen einen der Werte 0, l, m, und n annehmen kann. Im **Laborsystem** (k_{Target}=0) wird die Spinausrichtung der Observablen nach den Einheitsvektoren $\hat{k}$, $\hat{k}'$ und $\hat{k}''$, die in dieser Reihenfolge in der Impulsrichtung des Strahlteilchens, des gestreuten Teilchens und des Rückstoßteilchens liegen, und den Größen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma = \frac{1}{2}\,(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + |e|^2) \tag{A.8}$$

$$\sigma\ P = \sigma\ A_{00n0} = \sigma\ A_{000n} = \mathrm{Re}[a^*\ e] \tag{A.9}$$

$$\sigma\ A_{00sk} = -\ \mathrm{Re}[a^*\ d\ \sin\theta] - \mathrm{Im}[d^*\ e\ \cos\theta] \tag{A.10}$$

$$\sigma\ A_{00ss} = \mathrm{Re}[a^*\ d\ \cos\theta] + \mathrm{Re}[b^*\ c] - \mathrm{Im}[d^*\ e\ \sin\theta] \tag{A.11}$$

$$\sigma\ A_{00nn} = \frac{1}{2}\,(|a|^2 - |b|^2 - |c| + |d|^2 + |e|^2) \tag{A.12}$$

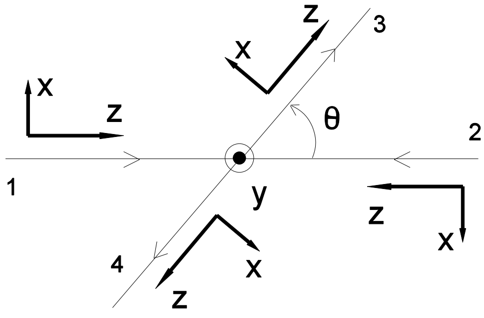

Abb. A2 Definition der jedem Teilchen zugeordneten Koordinatensysteme im CM-System nach der Madison Konvention [MAD70]: die z-Achse zeigt in Richtung des Impulses, die y-Achse steht senkrecht auf der Streuebene und die x-Achse wird so gewählt, daß das Koordinatensystem rechtshändig ist (= Streuwinkel im CM-System)

als differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\Lambda \chi = \frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} \chi = \lambda \chi \qquad \text{mit} \quad \lambda = \pm \frac{1}{2} \qquad (A.13)$$

$$<\lambda_3 \lambda_4| M |\lambda_1 \lambda_2> = \frac{1}{2ik} \sum_J (2J+1) <\lambda_3 \lambda_4| T^J(E) |\lambda_1 \lambda_2> d^J_{\lambda\mu}(\theta) \qquad (A.14)$$

Beschreibt man mit diesem Formalismus die Observablen im **Laborsystem**, so werden die

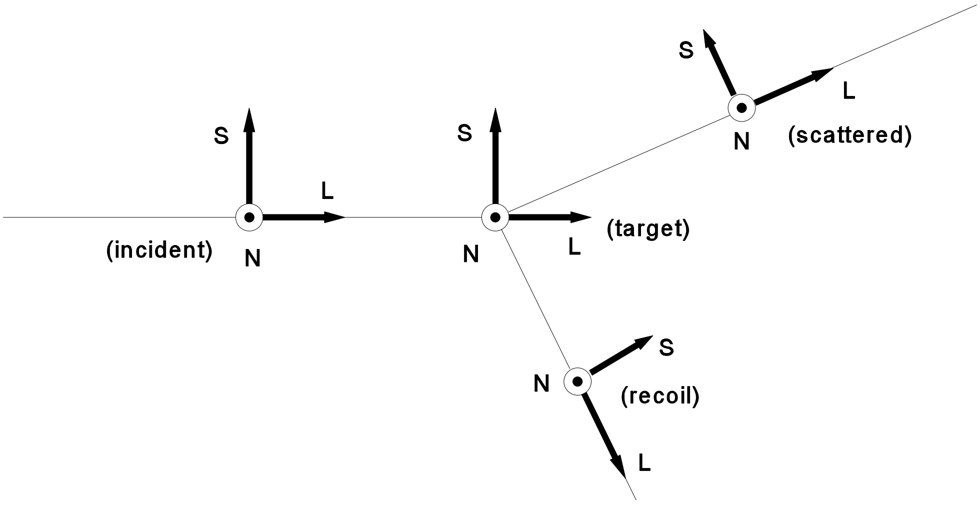

Abb. A3 Definition der jedem Nukleon zugeordneten Koordinatensysteme im Laborsystem (Argonne -Notation)
N = Richtung senkrecht auf der Streuebene
L = Richtung entlang des Impulses des jeweiligen Teilchens
S = N x L (rechtshändiges Koordinatensystem); N zeigt aus der Papierebene heraus

Koordinatensysteme der jeweiligen Teilchen mit den Buchstaben N, L und S charakterisiert (s. Abb. 2.3). Mit diesen neuen Koordinaten werden die Polarisationsobservablen durch Bilinearkombinationen von 5 komplexen Helizitätsamplituden (

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma = \frac{1}{2}\left(|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 + |\Phi_4|^2 + 4\,|\Phi_5|^2\right) \qquad \text{(A.15)}$$

$$\sigma\, P = \mathrm{Im}[(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4) \cdot \Phi_5] \qquad \text{(A.16)}$$

$$\sigma\, C_{SL} = \mathrm{Re}[(\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4) \cdot \Phi_5^*] \qquad \text{(A.17)}$$

$$\sigma\, C_{SS} = \mathrm{Re}[\Phi_1^* \cdot \Phi_2 + \Phi_3^* \cdot \Phi_4] \qquad \text{(A.18)}$$

$$\sigma\, C_{NN} = \mathrm{Re}[\Phi_1^* \cdot \Phi_2 - \Phi_3^* \cdot \Phi_4] + 2\,|\Phi_5|^2 \qquad \text{(A.19)}$$

Ein Beispiel dafür, daß auch unter Experten in der Polarisationsphysik nicht immer eindeutig klar ist, welches Koordinatensystem der Diskussion zugrunde liegt, zeigt Abbildung A4.

Abb. A4 In welcher Richtung zeigt die Quantisierungsachse? Eine schwierige Frage auch unter Experten [BOU80].